

# Interpolacje Newtona i Lagrange'a – Przykłady

Kacper Pawłowski

31 stycznia 2013

## Streszczenie

Tekst ten omawia na przykładach interpolacje Newtona i Lagrange'a. Może być przydatny dla osób, dla których przykład zawarty w książce [DK06] jest niewystarczający bądź chcą zobaczyć jak będzie wyglądał inny przykład liczbowy.

**Problem** Wyznaczyć wielomian interpolacyjny dla punktów  $(x_0, y_0) = (1, 11)$ ,  $(x_1, y_1) = (3, 25)$ ,  $(x_2, y_2) = (4, 35)$ .

## 1 Interpolacja Newtona

**Własność 1.1** Własność ilorazów różnicowych

$$f[x_0; \dots; x_k] = \frac{f[x_1; \dots; x_k] - f[x_0; \dots; x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Najlepiej rozpocząć rozwiązywanie problemu od stworzenia tabelki z następującymi kolumnami  $i$ ,  $x_i$ ,  $y_i = f(x_i)$  i kolumny z rzędami ilorazów różnicowych.

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	Ilorazy różnicowe	
0	1	11	$f[x_0; x_1] = 7$	$f[x_0; x_1; x_2] = 1$
1	3	25	$f[x_1; x_2] = 10$	
2	4	35		

Tablica 1: Tabela pomocnicza, pomysł pochodzi z [DK06]

**Obliczenia dot. ilorazów różnicowych**

$$\begin{aligned}f[x_0; x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{14}{2} = 7 \\f[x_1; x_2] &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{10}{1} = 10 \\f[x_0; x_1; x_2] &= \frac{f[x_1; x_2] - f[x_0; x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{3}{3} = 1\end{aligned}$$

**Obliczenia dot. wielomianu interpolacyjnego**

$k$  - liczba punktów

$$\begin{aligned}w(x) &= f[x_0] + \sum_{i=1}^{k-1} f[x_0; \dots; x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \\&= f[x_0] + f[x_0; x_1](x - x_0) + f[x_0; x_1; x_2](x - x_0)(x - x_1) \\&= 11 + 7(x - 1) + 1(x - 1)(x - 3) \\&= 11 + 7x - 7 + x^2 - 3x - x + 3 \\&= 7 + 3x + x^2\end{aligned}$$

## 2 Interpolacja Lagrange'a

$$\begin{aligned}w(x) &= \sum_{i=0}^{k-1} f[x_i] \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(x-x_{k-1})}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{k-1})} \\&= 11 \frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)} + 25 \frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)} + 35 \frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)} \\&= \frac{11}{6}(x-3)(x-4) - \frac{25}{2}(x-1)(x-4) + \frac{35}{3}(x-1)(x-3) \\&= x^2 - \frac{77}{6}x + \frac{375}{6}x - \frac{280}{6}x + \frac{11 \cdot 12}{6} + \frac{70}{6} \cdot 3 - \frac{75 \cdot 4}{6} \\&= 7 + 3x + x^2\end{aligned}$$

## Literatura

[DK06] Ward Cheney David Kincaid. *Analiza numeryczna*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006.